

№ 9.1.

a, b, c, d - целые числа

$$\left\{ \begin{array}{l} a+b+c < d \\ a+b+d < c \\ a+c < b \\ b+c+d < a \end{array} \right\} - \text{условие.}$$

Для выполнения условия необходимы отрицательные (отриц.) числа, без них ~~сумма~~ не обойтись, т.к. наименьшее число не будет больше суммы остальных.

Если на доске будет написано 1 отриц. число, то оно не будет больше суммы трех положительных чисел.

А вот если будет 2 отриц. числа ($a < b < 0 < c < d$), то самое маленькое число (a) не сможет быть больше суммы двух положительных и одного отрицательного числа, которое больше числа a , т.е. b и так больше a ($b > a$), а к нему еще прибавляют два положительных числа c и d . Значит на доске написано больше 2 отриц. чисел.

Если будет 3 отриц. числа ($a < b < c < 0 < d$), то сумма трех отриц. чисел всегда меньше положительного числа d ; сумма положительного числа d и двух больших отрицательных чисел (b и c) может быть меньше самого маленького числа a .

Например, $a = -5, b = -4, c = -3, d = 1$.

$$-5 + (-4) + (-3) \geq 1 \\ -12 \geq 1 \text{ (верно).}$$

903.

914

385.

$$-5 + (-4) + 1 < -3$$

$$-8 < -3 \text{ (в.)}$$

$$-5 + (-3) + 1 < -4$$

$$-7 < -4 \text{ (в.)}$$

$$-4 + (-3) + 1 < -5$$

$$-6 < -5 \text{ (верно)}$$

Ответ: 3 отрицательных числа.

№ 9.2. $y = x^2 + ax + b$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a, & \Rightarrow a + x_1 = -x_2 \\ x_1 \cdot x_2 = b; \end{cases}$$

$$x^2 + (a + x_1) + b - x_1^2 = 0$$

Если уравнение имеет хотя бы 1 корень $\Rightarrow D \geq 0$.

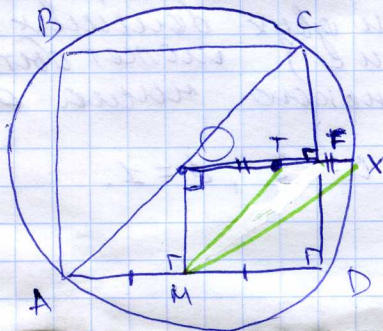
$$D = (a + x_1)^2 - 4(b - x_1^2) = (-x_2)^2 - 4b + 4x_1^2 =$$

$$= x_2^2 - 4x_1 \cdot x_2 + 4x_1^2 = (x_2 - 2x_1)^2 =$$

$$= (x_2 - 2x_1)^2$$

$$d^2 \geq 0 \Rightarrow (x_2 - 2x_1)^2 \geq 0.$$

№ 9.3.



Дано: окр. $(O; OX)$

ABCD - квадрат

$OT = TX = \frac{1}{2}OX$

$X \in \text{окр. } (O; OX)$

$AM = MD$

Доказать: $\frac{MX}{TM} = \sqrt{2}$.

Доказательство:

Допустим $OX \perp CD$

Проведем OM : $OX \perp OM$

Рассмотрим $\triangle OTM$ - н/у.

$$TM^2 = TO^2 + OM^2$$

$$TM = \sqrt{TO^2 + OM^2}$$

$$TO^2 = \left(\frac{1}{2} OX\right)^2 = \frac{1}{4} OX^2$$

$$OM = MD = \frac{1}{2} AD \text{ (т.к. } OMDF \text{ - квадрат)}$$

$$TM = \sqrt{\frac{1}{4} OX^2 + \frac{1}{4} AD^2} = \sqrt{\frac{1}{4} (OX^2 + AD^2)} = \frac{1}{2} \sqrt{OX^2 + AD^2}$$

Рассмотрим $\triangle OXM$ - н/у.

$$MX^2 = OX^2 + OM^2$$

$$MX = \sqrt{OX^2 + OM^2} = \sqrt{OX^2 + \frac{1}{4} AD^2} = \sqrt{\frac{4OX^2 + AD^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{4OX^2 + AD^2}$$

$$\frac{MX}{MT} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{4OX^2 + AD^2}}{\frac{1}{2} \sqrt{OX^2 + AD^2}} = \sqrt{\frac{4OX^2 + AD^2}{OX^2 + AD^2}}$$

$$AC \text{ - гипотенуза} \Rightarrow AC = 2r = 2OX$$

Рассмотрим $\triangle ACD$ - н/у.

$$AC^2 = CD^2 + AD^2 = 2AD^2 \Rightarrow AC = AD\sqrt{2}$$

$$AC = AC$$

$$AD\sqrt{2} = 2OX$$

$$OX = \frac{AD\sqrt{2}}{2} = \frac{AD\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = AD \sqrt{\frac{2}{4}} = AD \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{AD}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{MX}{MT} = \sqrt{\frac{4 \cdot \frac{AD^2}{2} + AD^2}{\frac{AD^2}{2} + AD^2}} = \sqrt{\frac{2AD^2 + AD^2}{1,5AD^2}} = \sqrt{\frac{3AD^2}{1,5AD^2}} = \sqrt{2}.$$

№9.4.

1 сентября — не пропускаем уроки
 в понедельник — 1 урок,
 во вторник — 2 урока
 в среду — 3 урока
 в четверг — 4 урока
 в пятницу — 5 уроков.

за 1 неделю Вася пропускает $1+2+3+4+5=15$ уроков.

Разделим пропущенное количество уроков за сентябрь на пропущенное кол-во уроков в неделю:

$64 : 15 = 4$ недели и 4 пропущенных урока.

Значит Вася пропустил 4 полных недели (4 нед. = 28 дней).

В сентябре 30 дней, значит 4 урока он пропустил за 1 день.

$30 \text{ дн.} - 28 \text{ дней} = 2 \text{ дня} = 1 \text{ день} + 1 \text{ день}$ (в который пропустил 4 урока)
 (1 сентября)

4 урока Вася пропускает в четверг, значит 1 сентября была среда (потому что пятницей оно не может быть, т.к. 1 сентября самый первый день в месяце)

на
 Ответ: среда.

№ 9.5. операция №1 (оп. №1): 2 золот. монеты $\rightarrow$ 3 сереб. + 1 меди.
операция №2 (оп. №2): 5 сереб. $\rightarrow$ 3 золотых + 1 медная.

914

1 золотая монета - x
одна серебряная монета - y
одна медная монета - z

n - количество операций №1
 m - кол-во оп. №2.

т.к. у Николая появилось 50 медных монет, то операций всего произошло 50 штук (потому что ~~всё~~ при любой операции Николай получает 1 медную монету, а до этого у него их не было). $n + m = 50$.

т.к. золотых монет не появилось в итоге, то все они золотые монеты, полученные при оп. №2, были потрачены при оп. №1, а т.к. для первой операции требуется 2 золотые монеты, то общее кол-во оп. №2 есть ~~хорошо~~ четное).
 m - четное число

m - четное число $\Rightarrow n$ - четное число.
 $m + n = 50$

Найдем результат двух разных операций:

$$\begin{array}{r} + 5y = 3x + 2 \\ + 2x = 3y + z \end{array}$$

$$5y + 2x = 3x + 3y + 2z \Rightarrow x - 2y + 2z \text{ (остается)}$$

т.е. если отдать 5 серебряных и 2 золотые монеты, то Николай получит 1 золотую и 2 медные монеты и потратит 2 серебряные.

Если он продает по 2 разных операции 20 раз, то получит 20 золотых и 40 медных монет и потратит 40 серебряных.

Чтобы потратить 20 золотых монет (т.к. в итоге их нет), нужно продать оп. №1 еще 10 раз, тогда золотых монет не останется, останется 10 медных монет и 30 серебряных

$$20x \rightarrow 30y + 10z.$$

В итоге, после 20 операций №2 и 30 операций №1 никакой потратит $(30y - 40y = -10y)$ 10 серебряных монет и получит 50 медных $(40z + 10z = 50z)$

Ответ: на 10 монет.

№9.6.

a, b, c — целые числа

$$a^2 + b^2 = 2(c^2 + 1)$$

т.к. по условию числа целые, то $(a^2 + b^2)$ делится на 2 без остатка, значит a^2 кратно двум и b^2 кратно двум $\Rightarrow a$ и b кратны 2 $\Rightarrow a, b$ — четные числа

$$c^2 + 1 = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

т.к. a, b — четные числа, то их можно представить следующим образом:

$$a = 2m, \quad b = 2n$$
$$\frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{4m^2 + 4n^2}{2} = 2(m^2 + n^2) \text{ — четное число.}$$
$$2(m^2 + n^2) = 2k$$

$$c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - 1 = 2k - 1$$

914

$2k - 1$ - нечетное число

$$c = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} - 1} = \sqrt{2k - 1}$$

c равно корню из нечетного числа,
таких чисел много, ~~и~~ бесконечно
много.

четных чисел (a, b) , также бесконеч-
но много, значит и множество троек (a, b, c)
также будет бесконечное. (т.к. состоит из элементов
трех бесконечных множеств).

Ответ: бесконечно.